Dérivabilité et Fonctions usuelles

Exercice 1 : Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = a^x, \quad 2)\ g(x) = e^{ax}, \quad 3)\ h(x) = xe^x.$$

Exercice 2 : Donner une comparésion entre

$$\pi^e \quad et \quad e^\pi$$

Exercice 3 : En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que :

$$1)\,\forall x > -1,\ \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, \quad 2)\,\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x.$$

Exercice 4 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

— $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0,$
— $g(x) = \sin \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0,$
— $h(x) = |x| \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, \quad x \neq 1, \quad f(1) = 1.$

Exercice 5 : Etablir les propositions suivantes :

— $\forall x \in]0,1[, \quad \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \arccos x,$
— $\forall x \in [-1,1], \quad 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x,$
— $\forall x \in [1,+\infty[, \quad 2 \operatorname{arg\,cosh} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \operatorname{arg\,cosh} x,$
— $\forall x \in [1,+\infty[, \quad \operatorname{arg\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$
— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$

Exercice 6 : Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 & si \quad x < 0, \\ \\ x \ln(x) & si \quad x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité au point $x_0 = 0$
2. Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente au point $O(0,0)$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $f(x) = 0$.